

§3.2 第2课时 空间向量长度与夹角的坐标表示

【学习目标】

1. 进一步熟悉空间向量的坐标表示.
2. 能利用空间向量的坐标解决一些简单的长度与夹角问题.

【重点难点】

重点: 熟悉空间向量的坐标表示.

难点: 利用空间向量的坐标解决一些简单的长度与夹角问题.

【导学流程】

一、直接导入

◇知识点一 空间向量的长度

【知识梳理】

1. 设向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

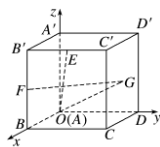
2. 设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

注意点: (1) 长度计算公式可以推广为 $|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2} = \sqrt{a^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + b^2}$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}}$.

(2) 求空间中线段的长度即对应空间向量, 因此空间两点间的距离公式就是空间向量模的计算.

例1 如图, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的顶点 A 位于坐标原点, 其中点 $B(1,0,0)$, 点 $D(0,1,0)$, 点 $A'(0,0,1)$.



(1) 若点 E 是棱 $B'C'$ 的中点, 点 F 是棱 $B'B$ 的中点, 点 G 是侧面 $CDD'C'$ 的中心, 则分别求出向量 \vec{OE} , \vec{OG} , \vec{FG} 的坐标;

(2) 在(1)的条件下, 分别求出 $(\vec{OE} + \vec{OG}) \cdot \vec{FG}$, $|\vec{EG}|$ 的值.

跟踪训练1 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 点 M 在 AC_1 上且 $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{MC_1}$, 点 N

为 B_1B 的中点, 则 $|\vec{MN}|$ 为()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

◇知识点二 空间向量的夹角

【知识梳理】

$$\text{若 } \mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1), \mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2), \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

注意点: (1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi]$.

(2) 空间两直线夹角可转化为两向量的夹角, 设直线 AB 与 CD 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle|$.

例 2 已知空间中三点 $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-2, 0, 3)$, 设 $\mathbf{a} = \vec{AB}$, $\mathbf{b} = \vec{AC}$.

(1) 求向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 夹角的余弦值;

(2) 若 \mathbf{a} 与 $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ 互相垂直, 求实数 k 的值.

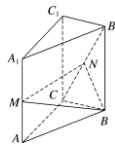
跟踪训练 2 已知向量 $\mathbf{a}=(x, 1, 2)$, $\mathbf{b}=(1, y, -2)$, $\mathbf{c}=(3, 1, z)$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$.

(1) 求向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ;

(2) 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ 夹角的余弦值.

◇知识点三 空间向量长度与夹角的综合问题

例 3 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB=1$, $\angle BCA=90^\circ$, 棱 $AA_1=2$, M , N 分别是 AA_1 , CB_1 的中点.



(1) 求 BM , BN 的长;

(2) 求 $\triangle BMN$ 的面积.

跟踪训练 3 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E , F , G 分别是 DD_1 , BD , BB_1 的中点.

(1) 求证: $EF \perp CF$;

(2) 求 EF 与 CG 所成角的余弦值;

(3) 求 CE 的长.

二、随堂演练

1. 已知空间向量 $\mathbf{a}=(0, 1, 1)$, $\mathbf{b}=(-1, 0, 1)$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知空间向量 $\mathbf{a}=(2, -1, x)$, $\mathbf{b}=(-4, 2, 6)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a}|$ 等于()

A. 3 B. $\sqrt{14}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{13}$

3. 向量 $\mathbf{a}=(2,4, x)$, $\mathbf{b}=(2, y, 2)$, 若 $|\mathbf{a}|=6$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $x+y$ 的值为()

- A. -3 B. 1 C. -3 或 1 D. 3 或 1

4. 已知 $A(2, -5, 1)$, $B(2, -2, 4)$, $C(1, -4, 1)$, 则向量 \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为_____.

三、课堂小结

1. 知识清单: (1)空间向量的长度. (2)空间向量的夹角.

(3)空间向量的长度及夹角的坐标表示在立体几何中的应用.

2. 方法归纳: 坐标法. 3. 常见误区: 两向量的夹角误认为就是两直线所成的角.

四、布置作业 (课时对点训练)

基础巩固

1. 已知 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(0, \sqrt{2}, 0)$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 等于()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 已知向量 $\mathbf{a}=(0, -1, 1)$, $\mathbf{b}=(4, 1, 0)$, $|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{29}$, 且 $\lambda > 0$, 则 λ 等于()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

3. 已知 $A(1, -2, 11)$, $B(4, 2, 3)$, $C(6, -1, 4)$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

4. 已知 $\mathbf{a}=(1-t, 1-t, t)$, $\mathbf{b}=(2, t, t)$, 则 $|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$ 的最小值是()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{55}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{11}{5}$

5. 已知 $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 1)$, O 为坐标原点, $\vec{OA} + \lambda \vec{OB}$ 与 \vec{OB} 的夹角为 120° , 则 λ 的值为()

- A. $\pm \frac{\sqrt{6}}{6}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\pm \sqrt{6}$

6. 已知向量 $\mathbf{a}=(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}=(-2, -4, -6)$, $|\mathbf{c}|=\sqrt{14}$, 若 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}=7$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{c} 的夹角为()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

7. 空间中点 $A(3, 3, 1)$ 关于平面 xOy 的对称点 A' 与 $B(-1, 1, 5)$ 的距离为_____.

8. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等, E 是 SB 的中点, 则 AE , SD 所成的角的余弦值为_____.

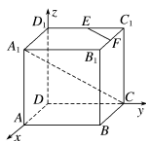
9. 已知空间中三点 $A(2, 0, -2)$, $B(1, -1, -2)$, $C(3, 0, -4)$, 设 $\mathbf{a}=\vec{AB}$, $\mathbf{b}=\vec{AC}$.

(1)若 $|\mathbf{c}|=3$, 且 $\mathbf{c} \parallel \vec{BC}$, 求向量 \mathbf{c} ;

(2)已知向量 $k\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 \mathbf{b} 互相垂直, 求 k 的值;

(3)求 $\triangle ABC$ 的面积.

10. 在① $(\vec{DE} + \vec{CF}) \perp (\vec{DE} - \vec{CF})$, ② $|\vec{DE}| = \frac{\sqrt{17}}{2}$, ③ $0 < \cos \langle \vec{EF}, \vec{DB} \rangle < 1$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的横线中, 并完成问题. 问题: 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 D 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$. 已知点 D_1 的坐标为 $(0,0,2)$, E 为棱 D_1C_1 上的动点, F 为棱 B_1C_1 上的动点, _____, 试问是否存在点 E, F 满足 $EF \perp A_1C$? 若存在, 求 $\vec{AE} \cdot \vec{BF}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



综合运用

11. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC = CA = CC_1$, 则 BM 与 AN 所成角的余弦值为()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 定义 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. 若向量 $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$, 向量 \mathbf{b} 为单位向量, 则 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ 的取值范围是()

- A. $[0, 6]$ B. $[6, 12]$ C. $[0, 6)$ D. $(-1, 5)$

13. $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$, 则 AC 边上的高 BD 长为_____.

14. 如图 1 所示, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, P 为 A_1B 上的点, $\vec{A_1P} = \lambda \vec{A_1B}$, 且 $PC \perp AB$, 则 λ 的值为_____; 异面直线 PC 与 AC_1 所成角的余弦值是_____.

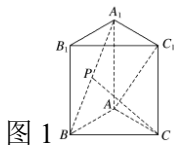


图 1

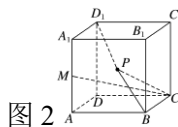


图 2

拓广探究

15. 如图 2 所示, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 AA_1 的中点, 点 P 在侧面 ABB_1A_1 内, 若 $D_1P \perp CM$, 则 $\triangle PBC$ 的面积的最小值为()

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 1

16. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形, 所有的棱长都是 2, M 是 BC 边的中点, 则在棱 CC_1 上是否存在点 N , 使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45° ?